EJERCICIO PRÁCTICO. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

PRIMERA PRUEBA PARTE A

Han de resolverse los 4 ejercicios, cada uno de los cuales se calificará con la puntuación máxima que aparece indicada. Se aplicarán los criterios de corrección generales y específicos de evaluación que ya han sido publicados.

Ejercicio 1. Calificación máxima 2,5 puntos.

Hallar todas las raíces de la ecuación $\mathrm{z}^3-(8+\mathrm{i})\mathrm{z}^2+(24+4\mathrm{i})\mathrm{z}-(24-6\mathrm{i})=0$ teniendo en cuenta que el producto de dos de ellas es $15+9i$.

Ejercicio 2. Calificación máxima 2,5 puntos.

Se dan dos puntos A$(a,0)$ y B$(0,b)$ tales que $a+b=2d\ (d\ constante)$.

Sobre AB como diagonal se construye un cuadrado cuyos otros vértices son C y D. Probar que al variar a y b, uno de estos vértices se mantiene fijo, y hallar el lugar geométrico determinado por el otro.

Ejercicio 3. Calificación máxima 2,5 puntos.

Resuelve estas cuestiones:

a) Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes propiedades

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad\forall\, x,y$$

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$$

Demostrar que $f(x)$ es derivable $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Obtener una expresión explícita de la función $f(x)$.

(Calificación máxima 1 punto).

b) Demostrar que para todo número natural positivo n se verifica:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Nota: $\ln$ significa logaritmo neperiano.

(Calificación máxima 0,75 puntos).

c) Demostrar que para todo número natural positivo n se verifica:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) - 1 < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

(Calificación máxima 0,75 puntos).

Ejercicio 4. Calificación máxima 2,5 puntos.

Disponemos de *N* + 1 urnas numeradas. Cada urna contiene N bolas, rojas o blancas, de tal manera que la urna *k* contiene *k -1* bolas blancas y *N – k + 1* bolas rojas (*k = 1, 2, 3,..., N + 1*).

Escogemos una urna al azar y extraemos sucesivamente con reemplazamiento n bolas.

a) Encontrar la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean blancas. Calcular el límite de esta probabilidad cuando N tiende a infinito.
(Calificación máxima 1,25 puntos).

b) Si hacemos una extracción más encontrar la probabilidad de que la bola n + 1 sea blanca, suponiendo que las n bolas escogidas con anterioridad eran blancas. Calcular el límite de esta probabilidad cuando N tiende a infinito.
(Calificación máxima 1,25 puntos).